

Risoluzione dei compiti del primo esonero di Matematica Finanziaria (novembre 2006).

1) Completare il seguente piano di ammortamento:

Epoca	Quota Capitale	Quota Interessi	Rate	Debito Residuo
0				X
1	1.000.000	600.000	X	3.000.000
2	X	X	2.450.000	X
3	X	X	X	X
4	X	X	1.150.000	X

Risoluzione.

Il valore del debito è $D_0 = 3.000.000 + QC_1 = 4.000.000$.

Possiamo dedurre il valore del tasso (ipotizzato costante):

$$i = \frac{QI_1}{D_0} = 0,15 \rightarrow i = 15\%$$

La prima rata è $R_1 = QC_1 + QI_1 = 1.600.000$.

Inoltre avremo $QI_2 = DR_1 \cdot i = 450.000$ da cui $QC_2 = R_2 - QI_2 = 2.000.000$ e
 $DR_2 = DR_1 - QC_2 = 1.000.000$.

All'epoca tre avremo $QI_3 = DR_2 \cdot i = 150.000$. Per determinare la rata, ricordiamo che la somma dei valori attuali delle rate fornisce il valore del debito:

$$\frac{1.600}{1,15} + \frac{2.450}{(1,15)^2} + \frac{R_3}{(1,15)^3} + \frac{1.150}{(1,15)^4} = 4.000 \rightarrow R_3 = 150$$

(nel calcolo abbiamo semplificato tutti gli importi per 1.000).

Deduciamo quindi $QC_3 = R_3 - QI_3 = 0$ perciò $DR_3 = DR_2 - QC_3 = 1.000.000$.

Infine all'epoca quattro: $QI_4 = DR_3 \cdot i = 150.000$ da cui $QC_4 = R_4 - QI_4 = 1.000.000$ e
 $DR_4 = 0$.

Il piano completo è:

Epoca	Quota Capitale	Quota Interessi	Rate	Debito Residuo
0				4.000.000
1	1.000.000	600.000	1.600.000	3.000.000
2	2.000.000	450.000	2.450.000	1.000.000
3	0	150.000	150.000	1.000.000
4	1.000.000	150.000	1.150.000	0

2) Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea di interesse)

$$\delta(t) = \frac{i}{5 + 5 \cdot t \cdot i}$$

- a) Calcolare il prezzo di una obbligazione che paga cedole annue di 4 e rimborsa il capitale alla pari dopo tre anni (con $i = 5\%$).
- b) Calcolare il TIR di detta obbligazione in caso di reinvestimento dei flussi intermedi al 6% in capitalizzazione composta.

Risoluzione.

Lo scadenziario dell'obbligazione è $(P; 4; 4; 104)/(0; 1; 2; 3)$. Il suo prezzo è dato da:

$$P = 4 \cdot v(1) + 4 \cdot v(2) + 104 \cdot v(3)$$

Dovremo preliminarmente determinare il fattore di sconto $v(t)$ dalla forza d'interesse utilizzando la relazione:

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$$

Calcoliamo innanzi tutto l'integrale della forza d'interesse:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta(s) ds &= \int_0^t \frac{i}{5 + 5 \cdot s \cdot i} ds = \frac{1}{5} \cdot \int_0^t \frac{5 \cdot i}{5 + 5 \cdot s \cdot i} ds = \\ &= \frac{1}{5} \cdot [\log(5 + 5 \cdot s \cdot i)]_0^t = \frac{1}{5} \cdot (\log(5 + 5 \cdot t \cdot i) - \log 5) = \frac{1}{5} \cdot \log \frac{5 + 5 \cdot t \cdot i}{5} = \\ &= \log(1 + t \cdot i)^{1/5} \end{aligned}$$

Avremo perciò

$$v(t) = (1 + t \cdot i)^{-1/5} = (1 + 0,05 \cdot t)^{-1/5}$$

Sostituendo il valore di t alle varie epoche si ottiene:

$$\begin{cases} v(1) = 0,9903 \\ v(2) = 0,9811 \\ v(3) = 0,9724 \end{cases}$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$P = 4 \cdot v(1) + 4 \cdot v(2) + 104 \cdot v(3) = 109,02$$

Supponiamo ora di reinvestire i flussi intermedi. Avremo all'epoca tre:

$$V_3 = 4 \cdot 1,06^2 + 4 \cdot 1,06 + 104 = 112,73$$

Il nuovo scadenziario è: $(P; 0; 0; V_3)/(0; 1; 2; 3)$ perciò il TIR si ottiene risolvendo l'equazione

$$P = V_3 \cdot (1 + i)^{-3} \Rightarrow i = \left(\frac{V_3}{P} \right)^{1/3} - 1 = 0,011234$$

3) Un prestito di 100.000 è restituito in 5 anni mediante il versamento di quote capitali semestrali che variano in progressione aritmetica di 250 al tasso del 4% semestrale.

Calcolare nuda proprietà ed usufrutto dopo tre anni utilizzando un tasso di valutazione effettivo annuo del 9,5%.

Risoluzione.

Le dieci quote capitale semestrali hanno la seguente successione, indicando con X la prima quota incognita:

$$(X; X + 250; X + 500; X + 750; X + 1.000; X + 1.250; \\ X + 1.500; X + 1.750; X + 2.000; X + 2.250)$$

Avremo perciò:

$$10X + 250 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 100.000 \Rightarrow X = 8.875$$

Dalla conoscenza delle quote capitale, possiamo risalire al debito residuo dalla relazione $DR_h = DR_{h-1} - QC_h$ ed infine si deducono le quote interesse e le rate. Il piano completo è (dove n rappresenta il numero di semestri):

n	QC	QI	R	DR
0				100.000
1	8.875	4.000	12.875	91.125
2	9.125	3.645	12.770	82.000
3	9.375	3.280	12.655	72.625
4	9.625	2.905	12.530	63.000
5	9.875	2.520	12.395	53.125
6	10.125	2.125	12.250	43.000
7	10.375	1.720	12.095	32.625
8	10.625	1.305	11.930	22.000
9	10.875	880	11.755	11.125
10	11.125	445	11.570	0

Posto $v = \frac{1}{1,095}$ avremo:

$$N(3) = 10.375 \cdot v^{0,5} + 10.625 \cdot v^1 + 10.875 \cdot v^{1,5} + 11.125 \cdot v^2 = 38.387,22$$

$$U(3) = 1.720 \cdot v^{0,5} + 1.305 \cdot v^1 + 880 \cdot v^{1,5} + 445 \cdot v^2 = 3.974,61$$

4) Sia data una rendita perpetua, a rata costante posticipata $R = 25$ euro pagabile alla fine di ogni semestre.

Calcolare il tasso istantaneo δ che rende equa l'operazione di acquisto della rendita al prezzo di 300 euro. Calcolare il valore attuale di tale rendita. Calcolare la variazione ΔP che deve subire il prezzo della rendita affinché l'operazione di acquisto abbia un TIR del 18%.

Risoluzione.

Imponiamo che il valore attuale della rendita sia pari a 300. Avremo:

$$VA = \frac{25}{i_{1/2}} = 300 \Rightarrow i_{1/2} = \frac{25}{300} = 0,08333$$

Possiamo quindi ricavare il tasso annuo ed il tasso istantaneo:

$$i = (1 + i_{1/2})^2 - 1 = 0,173611$$

$$\delta = \log(1 + i) = \log 1,173611 = 0,160085$$

Supponiamo ora che l'operazione di acquisto abbia un TIR del 18%. Avremo perciò:

$$300 + \Delta P = \frac{25}{\sqrt{1,18} - 1} \rightarrow \Delta P = -10,2392$$

Il nuovo prezzo sarà $P = 289,7610$.

5) Una operazione di leasing prevede l'acquisto di un automezzo del valore di 15.000 alle seguenti condizioni:

- durata 5 anni;
- 54 canoni mensili di 300 euro;
- oltre ai versamenti anticipati mensili, un maxicanone di 6 mensilità pagato in via immediata anticipata.

Calcolare:

a) il tasso di costo dell'operazione descritta.

b) Il tasso di costo in caso di versamenti anticipati regolari ed in assenza di maxi canone.

Risoluzione.

L'equazione di equilibrio finanziario è:

$$15.000 = 6 \cdot 300 + 300 \cdot \ddot{a}_{54|i_{1/2}} \Rightarrow 44 = \ddot{a}_{54|i_{1/2}}$$

dove l'incognita è il tasso mensile $i_{1/2}$.

RisolviAMO per interpolazione prendendo le seguenti soglie:

$$i_0 = 0,006 \rightarrow A_0 = 46,2843$$

$$i_1 = 0,010 \rightarrow A_1 = 41,9844$$

La formula dell'interpolazione consente quindi di ottenere:

$$i_{1/2} \approx i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,008125$$

Il tasso di costo su base annua è perciò $i = 1,008125^{12} - 1 = 0,101976$ (mentre la soluzione esatta è $i = 0,101058$).

Nella seconda alternativa, l'equazione di equilibrio finanziario è:

$$15.000 = 300 \cdot \ddot{a}_{60|i_{1/2}} \Rightarrow 50 = \ddot{a}_{60|i_{1/2}}$$

RisolviAMO per interpolazione prendendo le seguenti soglie:

$$i_0 = 0,004 \rightarrow A_0 = 53,4619$$

$$i_1 = 0,008 \rightarrow A_1 = 47,8842$$

La formula dell'interpolazione consente quindi di ottenere:

$$i_{1/12} \approx i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,006483$$

Il tasso di costo su base annua è perciò $i = 1,006483^{12} - 1 = 0,08063$ (mentre la soluzione esatta è $i = 0,079665$).

6) Un ammortamento di 8.000.000 è restituito in 3 anni in ammortamento italiano con preammortamento. La rata di preammortamento è pagata dopo 120 giorni ed il tasso del prestito è il 15%.

Stendere il piano di ammortamento.

Calcolare nuda proprietà ed usufrutto al 20% all'epoca 1.

Risoluzione.

La rata di preammortamento è pagata dopo 120 giorni (ossia 4 mesi) perciò avremo una quota interessi pari a:

$$I = 8.000.000 \cdot i_{1/3} = 8.000.000 \cdot (1,15^{1/3} - 1) = 381.516$$

Il piano d'ammortamento completo è perciò:

n	QC	QI	R	DR
0	0	0	0	8.000.000
4m.	0	381.516	381.516	8.000.000
1+4m.	2.666.667	1.200.000	3.866.667	5.333.333
2+4m.	2.666.667	800.000	3.466.667	2.666.667
3+4m.	2.666.667	400.000	3.066.667	0

Per il calcolo della nuda proprietà e dell'usufrutto dopo un anno al tasso $j = 0,20$

poniamo $v = \frac{1}{1+j} = 0,8333$. Avremo perciò:

$$N(1) = 2.666.667 \cdot (v^{1/3} + v^{4/3} + v^{7/3}) = 6.343.280$$

$$U(1) = 1.200.000 \cdot v^{1/3} + 800.000 \cdot v^{4/3} + 400.000 \cdot v^{7/3} = 2.017.999$$

7) Si acquista un BTP che paga cedole semestrali in base al tasso $J(2) = 0,045$, quota 99,42 e stacca le cedole l'1.7 e l'1.1 di ciascun anno.

Calcolare il TIR del BTP se oggi siamo al 16 novembre 2006 e la scadenza del titolo è il primo di luglio del 2009.

Risoluzione.

Il tasso semestrale è $i_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot J(2) = 0,0225$ perciò le cedole pagate il primo gennaio

ed il primo luglio di ogni anno valgono $C = 100 \cdot i_{1/2} = 2,25$.

L'equazione di equilibrio è perciò:

$$99,42 = \frac{2,25}{(1+i)^{3/24}} + \frac{2,25}{(1+i)^{15/24}} + \frac{2,25}{(1+i)^{27/24}} + \frac{2,25}{(1+i)^{39/24}} +$$

$$+ \frac{2,25}{(1+i)^{51/24}} + \frac{102,25}{(1+i)^{63/24}}$$

Risolviamo per interpolazione prendendo le seguenti soglie:

$$i_0 = 0,05 \rightarrow A_0 = 100,614$$

$$i_1 = 0,06 \rightarrow A_1 = 98,293$$

La formula dell'interpolazione consente quindi di ottenere:

$$i \approx i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,05514$$

(mentre la soluzione esatta è $i = 0,05510$).

8) Un ammortamento di 800.000 è restituito in 3 anni con versamento di rate semestrali di cui le prime due (uguali tra loro) sono rispettivamente la metà della terza e della quarta e 1/3 della quinta e della sesta; il tasso è il 7%.

Stendere il piano di ammortamento.

Calcolare nuda proprietà ed usufrutto al 10% all'epoca 1,5.

Risoluzione.

La successione delle rate semestrali è la seguente:

$$(X; X; 2X; 2X; 3X; 3X) / (1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

Il tasso semestrale equivalente è:

$$i_{1/2} = \sqrt{1,07} - 1 = 0,03441$$

$$\text{mentre } v = \frac{1}{1 + i_{1/2}} = 0,9667.$$

Imponendo che la somma dei valori attuali delle rate è pari al valore dell'importo prestato, avremo:

$$X \cdot (v + v^2) + 2X \cdot (v^3 + v^4) + 3X \cdot (v^5 + v^6) = 800.000$$

$$\Rightarrow X = \frac{800.000}{v + v^2 + 2v^3 + 2v^4 + 3v^5 + 3v^6} = 76.648,72$$

Conosciamo perciò tutte le rate.

La prima quota interessi vale

$$QI_1 = 800.000 \cdot i_{1/2} = 27.526,43$$

$$\text{perciò } QC_1 = R_1 - QI_1 = 49.122,28.$$

Gli altri elementi del piano d'ammortamento si ricavano quindi agevolmente. Il piano completo è il seguente (dove n rappresenta i semestri):

n	QC	QI	R	DR
0				800.000
1	49.122	27.526	76.649	750.878
2	50.812	25.836	76.649	700.065
3	129.210	24.088	153.297	570.856
4	133.655	19.642	153.297	437.200
5	214.903	15.043	229.946	222.297
6	222.297	7.649	229.946	0

Calcoliamo infine nuda proprietà ed usufrutto al tasso $j = 10\%$. Avremo

$$j_{1/2} = \sqrt{1+j} - 1 = 0,0488 \rightarrow v' = \frac{1}{1+j_{1/2}} = 0,9535$$

Infine:

$$N = 133.655 \cdot v' + 214.903 \cdot v'^2 + 222.297 \cdot v'^3 = 515.485,55$$

$$U = 19.642 \cdot v' + 15.043 \cdot v'^2 + 7.649 \cdot v'^3 = 39.033,45$$

9) Compro 10 zero coupon bond ad un anno che costano 97,51 e rimborsano 100 a scadenza nonché 25 obbligazioni biennali che pagano cedole annue al 4% e rimborsano il capitale a 101.

Sapendo che il mio TIR complessivo è il 4,5% calcolare il prezzo delle obbligazioni. Calcolare quale sarebbe stato il TIR complessivo se il prezzo delle obbligazioni fosse stato pari a 100.

Risoluzione.

Lo scadenziario dei due titoli è il seguente:

$$z_1: (97,51; 100)/(0; 1)$$

$$z_2: (P; 4; 105)/(0; 1; 2)$$

Lo scadenziario dell'operazione $10 \cdot z_1 + 25 \cdot z_2$ è:

$$\theta: (975,1 + 25P; 1.100; 2.625)/(0; 1; 2)$$

Il TIR complessivo dell'operazione θ è il 4,5% perciò avremo:

$$975,1 + 25P = \frac{1.100}{1,045} + \frac{2.625}{1,045^2} \rightarrow P = 99,2529$$

Ipotizzando che il prezzo delle obbligazioni sia pari a 100, il nuovo TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$2.625 \cdot v^2 + 1.100 \cdot v - 3.475,1 = 0$$

dove $v = \frac{1}{1+i}$. Applicando la formula risolutiva per le equazioni algebriche di

secondo grado, si ottiene $v = 0,959984$ (l'altra soluzione $v = -1,38$ non è accettabile)

dalla quale si deduce $i = \frac{1}{v} - 1 = 0,041684$.

10) Un investitore compra un'obbligazione che garantisce una rendita perpetua con rate semestrali di 200 la prima delle quali scade tra 3 mesi.

Gli viene offerto di cedere l'obbligazione in cambio di due pagamenti di 4.000 uno all'epoca t ed uno l'anno dopo.

Calcolare l'epoca t che rende equivalenti le due operazioni (tasso annuo $i = 10\%$).

Risoluzione.

Il valore attuale della prima rendita (perpetua e anticipata) è:

$$VA_1 = 1,10^{1/4} \cdot \frac{200}{\sqrt{1,10} - 1} = 4.196,43$$

Il valore attuale dei due pagamenti è:

$$VA_2 = 4.000 \cdot 1,10^{-t} + 4.000 \cdot 1,10^{-t-1} = 4.000 \cdot 1,10^{-t} \cdot (1,10^{-1} + 1) = 7.636,36 \cdot 1,10^{-t}$$

Le due operazioni sono equivalenti se $VA_1 = VA_2$ ossia:

$$7.636,36 \cdot 1,10^{-t} = 4.196,43 \Rightarrow t = -\frac{\log \frac{4.196,43}{7.636,36}}{\log 1,10} = 6,2815$$

11) Un investitore deve confrontare due operazioni:

- la prima costa 100 e offre entrate di 30 per i primi 3 anni e 45 all'epoca 4;
- la seconda costa 100 e offre entrate di 40 per i primi tre anni.

L'operazione integrativa che consente di rendere omogenee le due alternative consiste nel reinvestire gli importi intermedi della seconda operazione fino all'epoca 4 al 7%.

Calcolare:

- a) quale delle due operazioni finanziarie è conveniente;
- b) quale tasso di reinvestimento rende equivalenti le due operazioni in base al criterio del TIR.

Risoluzione.

Gli scadenziari delle due operazioni sono:

$$\theta_1 : (-100; 30; 30; 30; 45) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

$$\theta_2 : (-100; 40; 40; 40) / (0; 1; 2; 3)$$

L'operazione integrativa nella seconda operazione produce un'entrata all'epoca quattro data da:

$$40 \cdot (1,07^3 + 1,07^2 + 1,07) = 137,598$$

Lo scadenziario della seconda operazione diventa perciò:

$$\tilde{\theta}_2 : (-100; 0; 0; 0; 137,598) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Le due operazioni sono ora omogenee e confrontabili con il criterio del TIR.

Calcoliamo il TIR della prima operazione: dobbiamo risolvere l'equazione

$$45v^4 + 30v^3 + 30v^2 + 30v = 100$$

dove $v = \frac{1}{1+i}$.

Risolviamo per interpolazione prendendo le seguenti soglie:

$$v_0 = 0,85 \rightarrow A_0 = 89,09$$

$$v_1 = 0,95 \rightarrow A_1 = 117,95$$

La formula dell'interpolazione consente quindi di ottenere:

$$v \approx v_0 + \frac{v_1 - v_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,8878$$

perciò $i = \frac{1}{v} - 1 = 0,1264$ (mentre la soluzione esatta è $i = 0,1229$).

Per quanto riguarda la seconda operazione, dovremo risolvere l'equazione

$$137,598v^4 = 100 \rightarrow v = \left(\frac{100}{137,598} \right)^{1/4} = 0,9233$$

ed infine $i = \frac{1}{v} - 1 = 0,08306$

Concludiamo quindi che la prima operazione è più vantaggiosa, avendo un rendimento maggiore della seconda.

Dobbiamo ora determinare il tasso di reinvestimento affinché la seconda operazione abbia lo stesso TIR della prima.

Avremo perciò:

$$40 \cdot \left((1+i)^3 + (1+i)^2 + 1+i \right) \cdot 1,1229^{-4} = 100$$

$$\Rightarrow (1+i)^3 + (1+i)^2 + 1+i = 3,9747$$

L'equazione precedente, risolta con il metodo dell'interpolazione (prendendo come soglie il 14% ed il 16%) fornisce il risultato (esatto) $i = 0,1474$.

12) Un soggetto prende a prestito 200.000 euro per attivare un'impresa ed aggiunge un uguale importo di capitale proprio.

Ritiene che i redditi che produrrà saranno pari a 60.000 euro l'anno per un decennio. Considerando che il prestito è rimborsato in ammortamento francese al 7% calcolare il TIR dell'operazione.

Calcolare a quale tasso i avrebbe dovuto prendere a prestito le somme in oggetto se avesse desiderato un TIR maggiore dell'1% di quello precedentemente individuato.

Risoluzione.

Lo scadenziario della prima operazione è:

$$(-400.000; + 60.000; \dots; + 60.000) / (0; 1; \dots; 10)$$

La seconda operazione è il rimborso del prestito attraverso un ammortamento

francese la cui rata vale: $R = \frac{200.000}{a_{\overline{10}|0,07}} = 28.475,5$.

Lo scadenziario della seconda operazione è:

$$(+200.000; -R; \dots; -R)/(0; 1; \dots; 10)$$

Lo scadenziario dell'operazione complessiva sarà perciò (flussi netti):

$$(-200.000; +31.524,5; \dots; +31.524,5)/(0; 1; \dots; 10)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$200.000 = 31.524,5 \cdot a_{\overline{10}|i}$$

Risolviamo per interpolazione prendendo le seguenti soglie:

$$i_0 = 0,09 \rightarrow A_0 = 202.313$$

$$i_1 = 0,10 \rightarrow A_1 = 193.704$$

La formula dell'interpolazione consente quindi di ottenere:

$$i \simeq i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,092687$$

(il tasso esatto è $i = 9,2621\%$).

Ipotizziamo di avere un TIR maggiore di 1%, ossia $TIR = 10,2621\%$ (considerando il tasso esatto). Le entrate incognite X dell'operazione complessiva dovranno soddisfare la relazione:

$$200.000 = X \cdot a_{\overline{10}|0,102621} \rightarrow X = \frac{200.000}{a_{\overline{10}|0,102621}} = 32.916,5$$

Le rate del nuovo ammortamento francese varranno:

$$R' = 60.000 - 32.916,5 = 27.083,5$$

Il nuovo tasso i' dovrà quindi soddisfare l'equazione:

$$\frac{200.000}{a_{\overline{10}|i'}} = 27.083,5 \rightarrow a_{\overline{10}|i'} = \frac{200.000}{27.083,5} = 7,3846$$

Risolvendo nuovamente con il metodo dell'interpolazione, si ottiene $i' = 5,93\%$.